Муниципальное общеобразовательное учреждение

Лицей №33

Исследовательская работа по теме «Построение сечений и их применение»

Выполнили: Журавлёв Николай Андреевич,

Шабовта Владислав Сергеевич,

Учащиеся 10 РН класса

Руководитель: Перегудова Наталья Владимировна

г. Комсомольск-на-Амуре

2021 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы: исследование различных методов построения сечения многогранников.

В связи поставленной целью необходимо было решить ряд **задач**:

1. Расширить и углубить познания по программному материалу;
2. Изучить информацию по данной теме;
3. Систематизировать данный материал;
4. Составить алгоритм построения сечений;
5. Рассмотреть и исследовать различные методы построения сечений в геометрии;
6. Проанализировать решение задач на построение сечений различными методами в ЕГЭ.

Методы исследования:

- Практический и теоретический анализ специфики построения сечений при решении задач на построение сечений;

-анализ различных способов и приёмов, применяемых к задачам;

ГЛАВА I

1 Понятие изображения фигуры

При изучении теории и решении задач в школьном курсе геометрии выполнение чертежей в какой-либо определенной проекции ни в коей мере не оправдано, и оказывается вполне целесообразным выполнять построения изображений пространственных фигур в произвольной параллельной проекции. Произвольность при этом состоит в том, что положение оригинала относительно плоскости, на которую осуществляется проектирование, и направление проектирования на эту плоскость остаются неопределенными.

Возможность применения такого способа построения изображения следует из теоремы Польке-Шварца, в соответствии с которой:

Любой плоский четырехугольник ABCD вместе с его диагоналями может быть принят за параллельную проекцию тетраэдра, подобного тетраэдру произвольной формы.

Произвольные изображения фигуры можно получить, таким образом, не непосредственным проектированием фигуры, а выполняя построения в строгом соответствии с законами параллельного проектирования.

Определение: Изображением оригинала называют параллельную проекцию фигуры, подобной оригиналу.

Таким образом, при построении изображений необходимо учитывать следующие свойства параллельного проектирования:

1) Параллельная проекция точки есть точка.
2) Параллельная проекция прямой есть прямая или точка.

3) Отношение проекций отрезков одной и той же прямой равно отношению самих отрезков.

4) Проекциями параллельных прямых являются параллельные прямые.

5) Проекциями параллельных отрезков являются параллельные отрезки, причем отношение проекций равно отношению самих отрезков.

Из свойств параллельного проектирования следует, что изображением ромба, квадрата, прямоугольника, параллелограмма является параллелограмм; изображением трапеции является трапеция с тем же отношением оснований что и у оригинала; изображением окружности является эллипс.

Необходимо знать, что в основе изображения плоских фигур лежат:

Теорема 1.

Изображением данного треугольника может служить любой треугольник.

Теорема 2.

Если на плоскости изображений указаны изображения каких-либо трех точек общего положения общей фигуры Ф, то изображение любой точки плоскости может быть построено.

1.Требования к изображению фигур:

1) Изображение должно быть верным, то есть представлять собой фигуру, подобную параллельной проекции оригинала и получено с соблюдением всех свойств параллельного проектирования.

2) Изображение должно быть наглядным, то есть должно вызывать пространственное представление о форме оригинала и помогать усвоению содержания той задачи, которая решается при помощи этого представления.

3) Изображение должно быть быстро и легко выполняемым, то есть правила, по которым строится изображение, должны быть максимально просты.

С понятием верного изображения тесно связано понятие полноты изображения.

2. Понятие полноты изображения

Точку называют заданной на проекционном чертеже, если на нем изображена сама эта точка и ее параллельная проекция на некоторую плоскость, которую называют основной. Проекцию точки на основную плоскость называют ее вторичной проекцией.

Проектирование на основную плоскость называют внутренним. Нужно отметить, что нередко бывает удобно задавать внутреннее центральное проектирование. При этом определение заданной точки и полного изображения остаются аналогичными.

Изображение фигуры называют полным, если каждая точка этой фигуры является заданной, то есть для каждой точки фигуры на чертеже указана или может быть найдена построением ее проекция на основную плоскость

Направление проектирования нужно выбирать одним и тем же для всех точек фигуры. Легко обосновать справедливость следующих теорем:

Теорема 1.

Для того, чтобы изображение прямой было полным, необходимо и достаточно, чтобы две точки были заданными.

Теорема 2.

Для того, чтобы изображение плоскости было полным, необходимо и достаточно, чтобы были заданными три точки, не лежащие на одной прямой.

На основании этих теорем легко убедится в полноте изображений призмы, пирамиды, конуса и цилиндра. В качестве основной плоскости удобно выбирать плоскость основания, в качестве внутреннего проектирования для призм и цилиндров – параллельное, для пирамид и конусов – центральное проектирование.

3. Понятие позиционной задачи. Основной принцип и схема решения позиционных задач

Всякую задачу, где требуется определить общие элементы данных фигур, то есть построить пересечение данных фигур, называют позиционной.

Более сложными и интересными являются задачи на построение плоских сечений произвольных призм и пирамид плоскостью общего положения. В общем случае секущая плоскость пересекает плоскость каждой грани многогранника и каждую из прямых, на которой лежат ребра многогранника. Прямую, по которой секущая плоскость пересекает плоскость какой-либо грани многогранника, называют следом секущей плоскости на плоскости этой грани. А точку, в которой секущая плоскость пересекает прямую, содержащую какое-нибудь ребро, называют следом секущей плоскости на этой прямой. След секущей плоскости на плоскости основания называют просто следом секущей плоскости.

В основе решения задач на построение сечений лежит принцип расширения числа заданных элементов, который заключается в следующем: с помощью ранее заданных точек, прямых и плоскостей на изображении определяют дополнительные точки, прямые и плоскости как заданные элементы изображения относительно плоскости, принятой за основную. При этом принято придерживаться следующей схемы решения позиционных задач:

- Установление фактора полноты изображения или обеспечение его полноты заданием дополнительных элементов, если оно неполное.

- Применение принципа расширения числа заданных элементов с целью отыскания путей построения требуемых точек пересечения.
- Фактическое выполнение на изображении построений, связанных с расширением заданных элементов, и, как результат этих графических операций, эффективное построение этих точек пересечения.

4. Проверка правильности построенного сечения.

- 1.Построенное сечение выпуклого многогранника всегда выпуклый многогранник
- 2.Вершины данного сечения всегда лежат на соответствующих ребрах данного многогранника.
- 3.Данные точки, лежащие на гранях многогранника, всегда должны лежать на сторонах многоугольника полученного сечения.
- 4.Две стороны многоугольника, получившегося сечения, не могут принадлежать одной грани данного многогранника.
- 5.Если сечение пересекает параллельные грани, то соответствующие этим граням стороны построенного сечения должны быть параллельными.

ГЛАВА II

1. Метод следов в построении плоских сечений многогранников

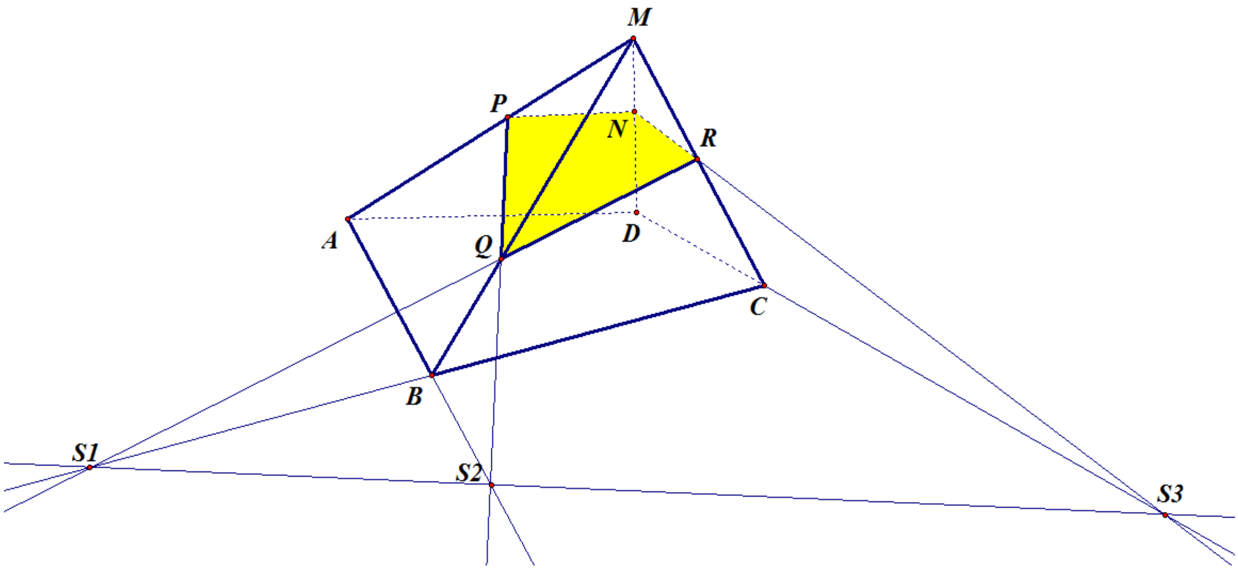
Сущность метода следов при решении позиционных задач на построение сечений тел заключается в эффективном построении общих точек, а по ним и прямых пересечения(следов) секущей плоскости с плоскостями граней, диагональных или осевых сечений тела. Обычно решение задачи на построение сечения методом следов начинается с построения прямой пересечения секущей плоскости с основной плоскостью. Эту прямую называют главным следом.

Рассмотрим конкретный пример.

Задача №1

В четырехугольной пирамиде MABCD на ребрах MA, MB, MC заданы соответственно точки P,Q,R. Построить сечение пирамиды плоскостью PQR.

.



Решение:

- Так как R,Q лежат в грани MCB, то S_1 – точка пересечения BC и QR является точкой пересечения QR с плоскостью основания.
- Аналогично PQ и AB пересекаются в точке S_2 принадлежащей плоскости сечения и плоскости основания.

Итак, S_1 и S_2 точки плоскости сечения, лежащие в плоскости основания, то есть S_1S_2– след плоскости сечения.

- Плоскость грани MDC пересекает прямую S_1S_2 в точке $S_3=DC\cap S_1S_2$
- Точки P и S_3 лежат в плоскости сечения и в плоскости грани MDC. Следовательно, PS_3 – прямая пересечения этих плоскостей.
- $PS_3\cap MD=T$, P и T – точки плоскости сечения, лежащие в одной грани. Следовательно, PQRT- искомое сечение.

2. Метод внутренних проекций в построении плоских сечений многогранников

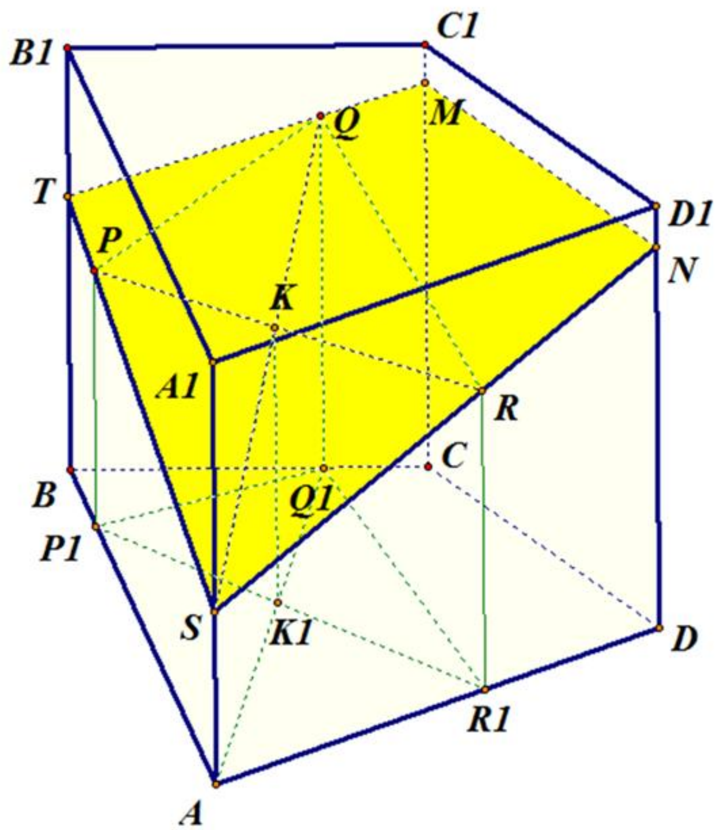
Сущность метода внутренних проекций при решении задач на построение сечений заключается в том, что по проекциям точек секущей плоскости на основную плоскость находятся дополнительные точки секущей плоскости. Это возможно по той причине, что каждая точка секущей плоскости проектируется на основную плоскость в виде лишь одной вполне определенной точки при выбранном аппарате проектирования. При этом проекции искомых точек секущей плоскости выбираются так, чтобы они были связаны с проекциями точек, определяющих секущую плоскость, и чтобы число графических операций при решении задач было минимальным.

Рассмотрим конкретный пример.

Задача №2

В четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы точки P, Q, R соответственно в гранях (ABB_1), (BCC_1), (ADD_1).

Построить сечение плоскостью PQR.



Решение:

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – изображение данной четырехугольной призмы, P,Q,R-изображения данных точек плоскости сечения.

1) Установим свойство полноты изображения. За основную плоскость возьмем плоскость основания призмы, а за направление внутреннего проектирования – направление бокового ребра. Относительно аппарата внутреннего проектирования изображение будет полным.

Вторичные проекции данных точек P,Q,R находятся однозначно:

P_1: $PP_1 \parallel AA_1$, $P_1 \in AB$; Q_1: $QQ_1 \parallel AA_1$, $Q_1 \in BC$; R_1: $RR_1 \parallel AA_1$, $R_1 \in AD$;

Таким образом изображение плоскости PQR - полное.

2) Рассмотрим проектирующую плоскость PRR_1P_1 и плоскость QQ_1AA_1. Эти плоскости пересекают основную плоскость по прямым P_1R_1 и AQ_1.

Пусть K_1- точка пересечения P_1R_1 и AQ_1.

3) Так как K_1 принадлежит P_1R_1, то она является вторичной проекцией точки K, принадлежащей PR, при этом K строится однозначно: $KK_1 \parallel AA_1$, $K \in PR$.

4) Точки Q и K лежат в плоскости сечения и в плоскости QQ_1AA_1. Следовательно, QK- прямая, по которой пересекаются эти плоскости. QK и AA_1 лежат в одной плоскости. Тогда $S=QK \cap AA_1$- точка плоскости сечения на ребре AA_1.

5) Плоскость A_1ABB_1 пересекается с плоскостью сечения по прямой SP. $SP \cap BB_1=T$.

6) Плоскость B_1BCC_1 пересекается с плоскостью сечения по прямой TQ. $TQ \cap CC_1 = M$.

7) Плоскость AA_1DD_1 пересекаются с плоскостью сечения по прямой SR. $SR \cap DD_1 = N$.

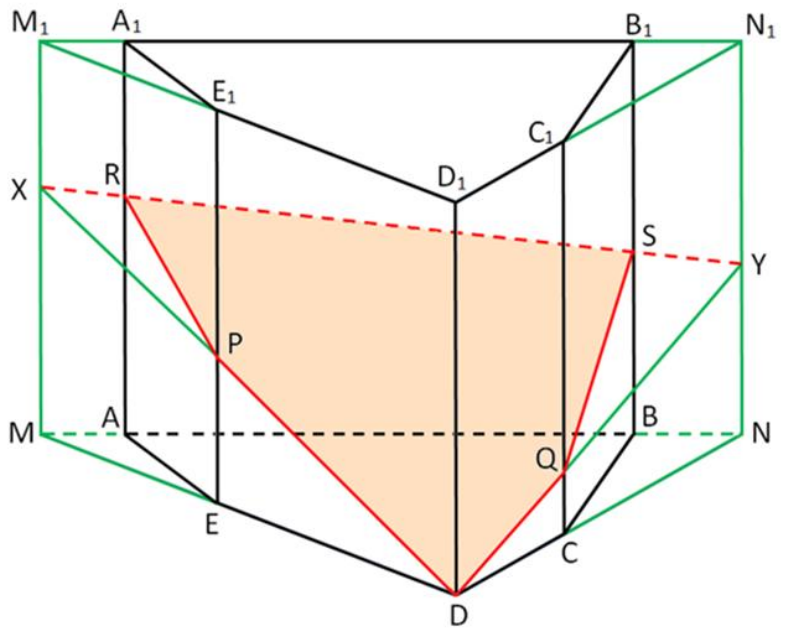
TSNM- искомое сечение.

3. Метод дополнения n-угольной призмы(пирамиды) до треугольной призмы(пирамиды)

Суть этого метода состоит в следующем: данную призму(пирамиду) достраиваем до треугольной призмы(пирамиды), строим сечение полученной треугольной призмы(пирамиды), искомое сечение получается как часть сечения треугольной призмы(пирамиды). Рассмотрим сущность этого метода на конкретном примере.

Задача №3

В пятиугольной призме $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ на ребре EE_1 задана точка P, на ребре CC_1 точка Q. Построить сечение призмы плоскостью (PDQ).



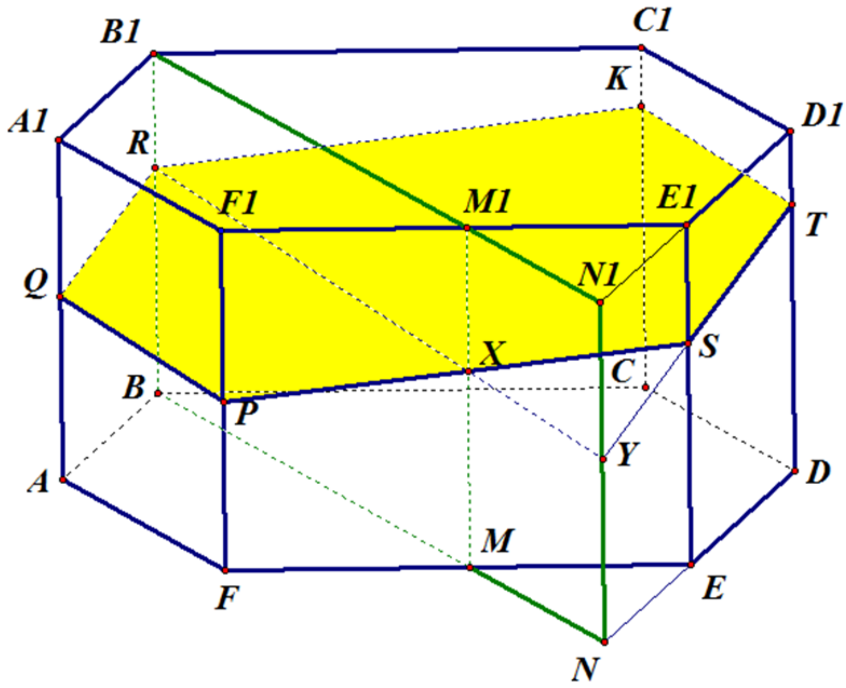
- Решение: Достроим пятиугольник ABCDE до треугольника MDN; $M=(ED) \cap AB$, $N=(DC) \cap (AB)$. Достроим данную призму до треугольной $MDNM_1D_1N_1$, где $M_1=(E_1D_1) \cap (A_1B_1)$, $N_1=(C_1D_1) \cap (A_1B_1)$;
- Так как P и D лежат в одной грани построенной треугольной призмы, то плоскость сечения пересекает грань DD_1M_1M по DX, где $X=(PD) \cap (MM_1)$.
- Так как D и Q лежат в грани DD_1N_1N построенной треугольной призмы, то плоскость сечения пересекает эту грань по DY, где $Y=(DQ) \cap NN_1$;
- Так как X и Y лежат в грани MM_1N_1N, то DXY – сечение треугольной призмы плоскостью PDQ; Так как ребра AA_1 и BB_1 лежат в грани MM_1N_1N, то $R=AA_1 \cap XY$, $S=XY \cap BB_1$ точки плоскости PDQ. Таким образом DPRSQ – искомое сечение

4.Метод параллельных прямых

В основу этого метода положено свойство параллельных плоскостей: «Прямые, по которым плоскость пересекает данные параллельные плоскости, параллельны между собой». Рассмотрим сущность этого метода на конкретном примере.

Задача №4

В основании призмы лежит шестиугольник ABCDEF. На ребрах AA_1, BB_1, FF_1 заданы точки Q, R, P соответственно. Построить сечение призмы плоскостью PQR, есть BC||EF.



Решение:

- В силу условия плоскость сечения PQR пересекает грани AA_1F_1F и AA_1B_1B по QP и QR. Через ребро BB_1 проведем плоскость параллельную грани AA_1F_1F;
- Проведем BN||AF, так как параллельные плоскости пересекаются по параллельным прямым, $N=BN\cap ED$, $M=BN\cap EF$. Следовательно, плоскость B_1BN пересекается с гранью FF_1E_1E по MM_1, с гранью EDD_1E_1 по NN_1;($B_1N_1||A_1F_1$, $B_1N_1\cap E_1F_1=M_1$, $N_1 \varepsilon E_1D_1$)
- В плоскости NBB_1 проведем RY||QP, $Y \varepsilon NN_1$; Так как $(FAA_1)||(NBB_1)$ и $QP\in(PQR)$, то $RY\cap MM_1=X$, $X_1Y\in(PQR)$, $X\in(EFF_1)$, $Y\in(DEE_1)$. Следовательно, PX – след плоскости сечения в грани EFF_1E_1
- $PX\cap EE_1=S$; $Y,S\in(PQR)\cap(DEE_1)$; $YS\cap DD_1=T$; Итак, ST- след плоскости сечения в грани EE_1D_1D.
- Так как по условию грани CBB_1C_1 и EFF_1E_1 параллельны, то RK||PS и RK – след плоскости сечения в грани CBB_1C_1; Итак, RQPSTK – искомое сечение.

5. Метод переноса секущей плоскости

Суть этого метода состоит в следующем: строится такое вспомогательное сечение данного многогранника, которое удовлетворяет следующим требованиям:

1) Оно должно быть параллельно секущей плоскости.

2) В пересечении с поверхностью данного многогранника образуется треугольник. После этого искомое сечение строится на основании свойств прямых, по которым две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью.

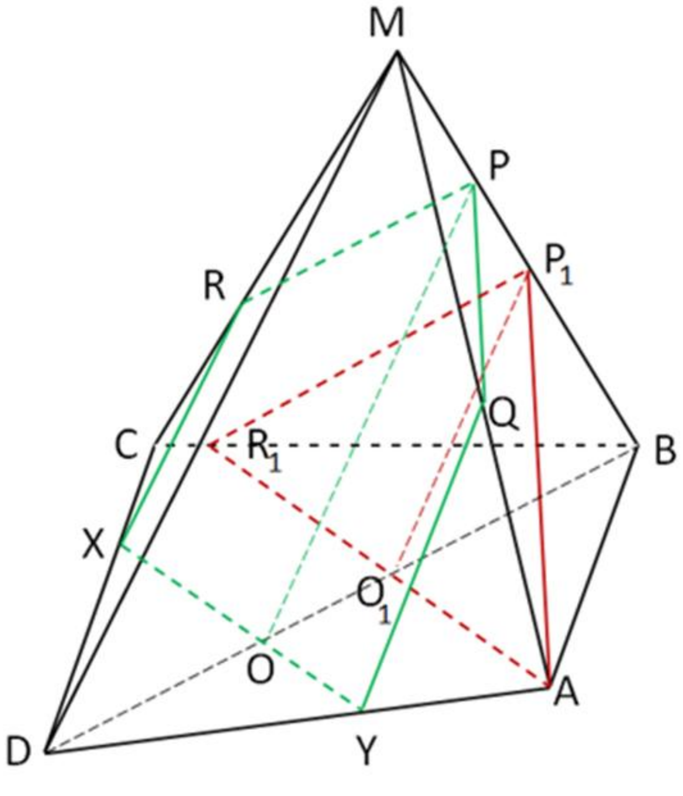
Рассмотрим сущность этого метода на конкретных примерах.

Задача №5

В основании пирамиды лежит прямоугольная трапеция с основаниями AB и CD. Грань MBC перпендикулярна плоскости основания. На ребре MB задана точка P такая, что MP:PB=1:2. Через точку P проведено сечение пересекающее ребра MA и MC соответственно в точках Q и R, причем PR перпендикулярно MB, а угол $\angle QPB=60^0$.

А) Построить сечение плоскостью PQR.

Б) Найти расстояние от точки M до плоскости сечения, если MC=BC=MB=a, AB=$\frac{a\sqrt{3}}{3}$, CD=2a.



Решение:

А) Построим сечение методом переноса секущей плоскости.

1) PQ - след плоскости сечения в грани MAB. Проведем AP_1 параллельно PQ, где $P_1 \in$ MB.

2) PR – след плоскости сечения в грани MBC. Проведем P_1R_1 параллельно PR, где $R_1 \in$ BC.

3) A_1R след плоскости AP_1R_1 в основании пирамиды. Рассмотрим диагональное сечение MBD. $BD \cap AR_1 = O_1$, $P_1O_1 \in (AP_1R_1)$. Проведем $PO \parallel P_1O_1$. Так как $(PQR) \parallel (AP_1R_1)$, то $PO \in$ APR, где $o \in BD$, $XY \in (APR)$, где $XY \parallel AR_1$ и $O \in XY$, $X \in DC$, $Y \in AD$. Тогда XPRQY – искомое сечение.

Б) Рассмотрим решение методом применения теории объемов к решению задач.

1) Найдем расстояние от точки M до плоскости AP_1R_1; в ΔAP_1B согласно теореме о трех перпендикулярах $P_1B \perp AB$, так как BC – проекция P_1B перпендикулярна AB по условию.

$\angle AP_1B = \angle QPB = 60^0$, $\angle P_1AB = 30^0$ и $P_1B = \frac{1}{2}AP_1$. По теореме Пифагора $(2P_1B)^2 - (P_1B)^2 = AB^2$, $3(P_1B)^2 = \frac{a^2}{3}$ и $P_1B = \frac{a}{3}$, а $AP_1 = \frac{2}{3}a$.

2) $\Delta R_1P_1B = \Delta AP_1B$ по стороне и двум прилегающим углам(P_1B-общая сторона, $\angle R_1P_1N = \angle ABP_1 = 90^0$, $\angle AP_1B = \angle P_1BR_1 = 60^0$)

3) $\Delta R_1P_1A = \Delta R_1BA$ по трем сторонам($R_1B = AB$, $AP_1 = BR_1$, R_1A – общая сторона). Следовательно, $S_{R1P1A} = S_{R1B1A}$

4) Рассмотрим две треугольные пирамиды MR_1P_1A и MR_1BA. Площади оснований у них равны. Следовательно, их объемы относятся как высоты. Высота ΔMBC равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ и является высотой пирамиды $MABR_1$. По теореме об объеме пирамиды отсекаемой от пирамиды плоскостью непараллельной основанию имеем:

$\frac{V_{MR1P1A}}{V_{MR1BA}} = \frac{MP_1}{MB} * \frac{MR_1}{MR_1} * \frac{MA}{MA} = \frac{2}{3}$; Значит $\frac{p(M_1(R_1P_1A))}{P(M_1(R_1BA))} = \frac{2}{3}$ и

$p(M_{1,}(R_1P_1A)) = \frac{2}{3} * \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Так как $(PQR) \parallel (AP_1R_1)$, то $\frac{p(M_1(QRP))}{p(M_1(AP_1R_1))} = \frac{MP}{MP_1} = \frac{1}{2}$ и $p(M_{1,}(R_1P_1A) = \frac{1}{2} * \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Ответ: а) XRPQY – искомое сечение, б) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

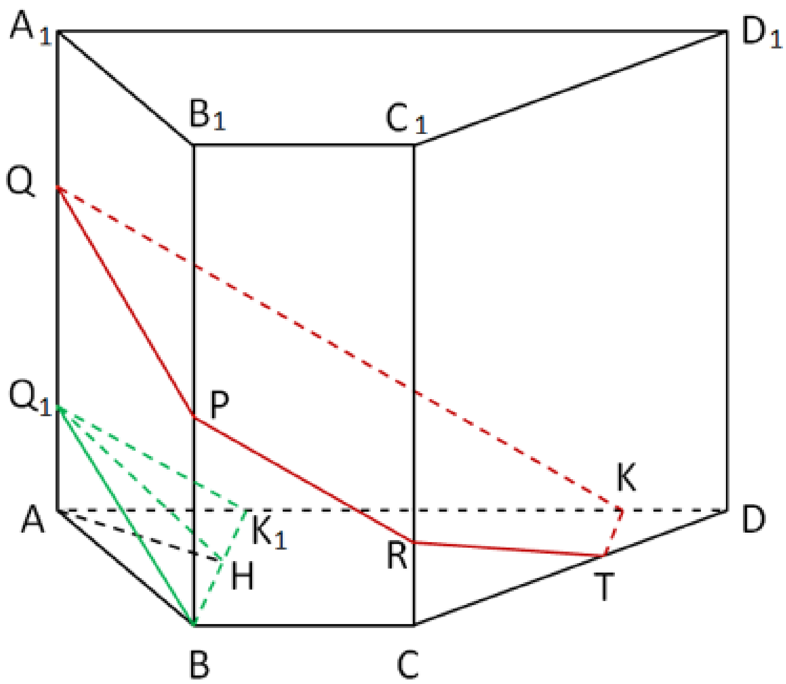
Задача №6

В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция ABCD, $AD \parallel BC$, $\angle BAD = 60^0$, AB=4, AD=12; На ребре AA_1 задана точка Q, на ребре AD-точка K, на ребре BB_1-точка P, причем AQ=6, AK=12, PB=4. Длина ребра AA_1 равна 12.

А) Построить сечение призмы плоскостью PQK.

Б) Найти угол образованный плоскостью сечения с плоскостью основания.

В) Найти расстояние от точки A до плоскости сечения.



Решение:

А) Построим сечение методом переноса секущей плоскости.

- 1) Проведем PQ и построим $BQ_1 \| PQ$, $Q_1 \in AA_1$,
- 2) Проведем QK и $Q_1K_1 \| QK$, где $K_1 \in AD$. Сечение BQ_1K_1 параллельно плоскости PQK. BK_1 – след этого сечения.
- Так как $(BQ_1K_1) \| (PQK)$, то плоскость PQK пересекает основание призмы по прямой KT, где $KT \| BK_1$, $T \in CD$.
- Так как $(ADD_1) \| (BCC_1)$, то плоскость PQK пересекает плоскость BCC_1 по прямой PR, где $PR \| QK$. Сечение PQKTR искомое.

Б)

- Так как по условию BP=4, то $Q_1Q=4$, так как Q_1QPB – параллелограмм. Следовательно, $AQ_1=2$.
- Треугольник AQ_1K_1 подобен треугольнику AQK, 2AQ=AK (по условию). Следовательно, $2AQ_1=AK_1=4$.
- ТреугольникABK_1 – равносторонний треугольник, так как $AK_1=4$ и по условию AB=4, $\angle BAD=60^0$.

4) Найдем угол между плоскостями (Q_1BK) и (ABC). Пусть $AH \perp BK_1$; По теореме о трех перпендикулярах $Q_1H \perp BK_1$, $AH=\frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, $Q_1H=\sqrt{AQ_1^2 + AH^2} = \sqrt{4+12} = 4$. $\angle AHQ_1$ – искомый угол; Так как $\angle Q_1AH=90^0$, $AQ_1=2$, $Q_1H=4$, то $\angle AHQ_1=30^0$, так как катет равен половине гипотенузы.

В) В основе решения лежит метод подобия

Отношение расстояний от точки A до плоскости PQK к расстоянию от точки A до плоскости BQ_1K_1 равно $AQ:AQ_1=3$. Расстояние от точки A до плоскости BQ_1K_1 равно высоте треугольнике Q_1AH, опущенной из вершины A.

$$h=\frac{AQ_1*AH}{Q_1H}=\frac{2*2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$$

Следовательно, расстояние от точки A до плоскости сечения равно $3\sqrt{3}$.

Ответ: б) 30^0, в)$3\sqrt{3}$.

Глава III

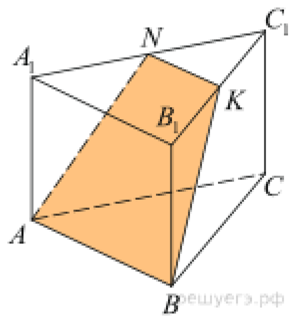
1.

В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра A_1C_1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN.

.

Решение.



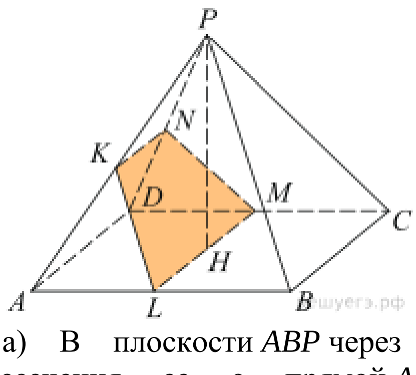
а) Проведём через точку N прямую, параллельную прямой AB, до пересечения с прямой B_1C_1 в точке K. Трапеция $ABKN$ — искомое сечение.

2.

В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 4, точка K — середина бокового ребра AP.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым PB и BC.

Решение.



а) В плоскости ABP через точку K проведем прямую, параллельную прямой PB до пересечения ее с прямой AB в точке L — середине AB. В основании $ABCD$ через точку L проведем прямую, параллельную прямой BC до пересечения ее с ребром CD в точке M — его середине. По признаку параллельности прямой и плоскости плоскость KLM параллельна прямым PB и BC. Прямая LM параллельна прямой AD, следовательно, она параллельна плоскости APD, а, значит плоскость KLM пересекает плоскость APD по прямой, параллельной LM и пересекает ребро PD в его середине N.

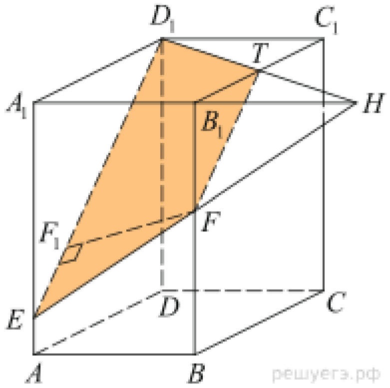
Таким образом, искомое сечение — трапеция $KLMN$.

3.

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4 : 3.

Решение.



а) Проведём отрезок ED_1 и в плоскости грани BB_1C_1C проведём через точку T прямую, параллельную ED_1. Эта прямая пересечёт ребро BB_1 в точке F. Точка F лежит в плоскости ETD_1. Треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны, как треугольники с параллельными сторонами, следовательно,

$$\frac{B_1F}{B_1T} = \frac{A_1E}{A_1D_1} = \frac{6A_1A}{7AD} = \frac{6\cdot 14}{7\cdot 12} = 1.$$

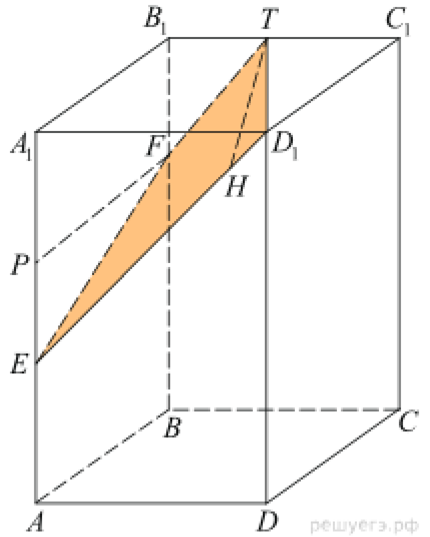
Таким образом, $B_1F = B_1T = \frac{1}{2}B_1C_1 = 6.$ Тогда $FB = 14 - 6 = 8$ и $BF : FB_1 = 4 : 3.$

4.

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 5 : 11$, а точка T − середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

Решение.



а) Плоскость EFT пересекает грани BB_1C_1C и AA_1D_1D по параллельным отрезкам.

$$TB_1 = 5,\ B_1F = \frac{5}{16} \cdot 16 = 5,\ A_1E = \frac{5}{8} \cdot 16 = 10,\ A_1D_1 = 10.$$

Значит, треугольники D_1A_1E и TB_1F подобны, причём прямые D_1A_1 и B_1C_1 параллельны, прямые A_1E и B_1F тоже параллельны. Поэтому прямые ED_1 и FT также параллельны. Если плоскость EFT не проходит через точку D_1, то получается, что в плоскости AA_1D_1D через

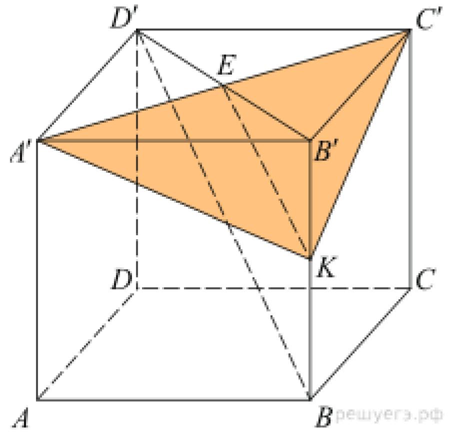
5.

Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA'B'C'D'$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K — середина ребра BB'. Через точки K и C' проведена плоскость α, параллельная прямой BD'.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

Решение.



а) Проведём KE — среднюю линию треугольника $BB'D'$. E — середина $B'D'$, следовательно, точка пересечения диагоналей верхнего основания и сечение содержит диагональ $A'C'$. Треугольник $A'C'K$ является искомым сечением по признаку параллельности прямой и плоскости.

Прямоугольные треугольники $A'B'K$ и $C'B'K$ равны по двум катетам, поэтому $A'K = C'K$, следовательно, треугольник $A'C'K$ — равнобедренный.

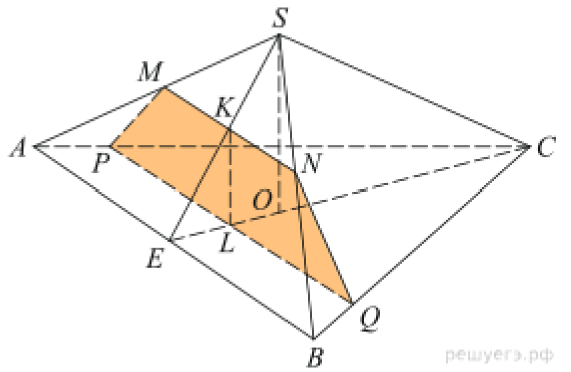
6.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Решение.



а) Прямая MN параллельна плоскости ABC, поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ, параллельной MN. Рассмотрим плоскость SCE. Пусть K — точка пересечения этой плоскости и прямой MN, L — точка пересечения этой плоскости и прямой PQ, O — центр основания пирамиды. Плоскости SCE и MNQ перпендикулярна плоскости ABC, поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC, а значит, параллельна прямой SO. Поскольку MN — средняя линия треугольника ASB, точка K является серединой ES. Значит, L — середина EO. Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении 2 : 1. Значит, $CL : LE = 5 : 1$.

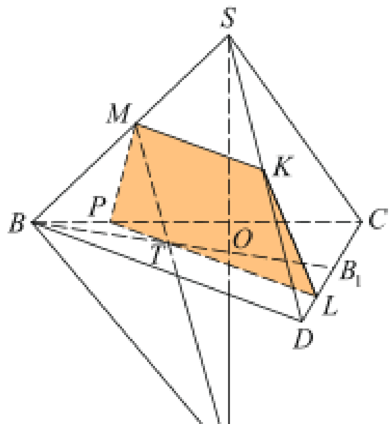
7.

Все рёбра правильной треугольной пирамиды $SBCD$ с вершиной S равны 9.

Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M — середина ребра SB , точка L лежит на ребре CD так, что $CL : LD = 7 : 2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SBCD$ плоскостью S_1LM — равнобедренная трапеция.

Решение.



а) Проведём медиану S_1M треугольника SS_1B, которая пересекает прямую BB_1, являющуюся одновременно медианой треугольника SS_1B и основания BCD, в точке T. Тогда $BT : TB_1 = 4 : 5$.

Точка L, в свою очередь, делит отрезок B_1D в отношении $DL : LB_1 = 4 : 5$, так как $LD : LC = 2 : 7$, а BB_1 — медиана треугольника BCD.

Следовательно, сторона сечения, проходящая через точки L и T, параллельна стороне BD основания BCD. Пусть прямая LT пересекает BC в точке P.

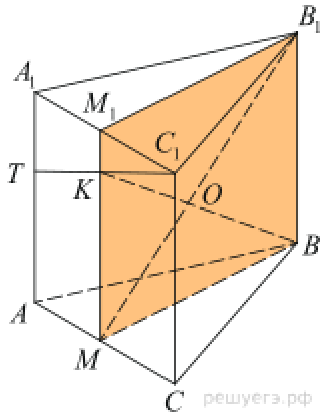
Проведём в треугольнике SBD через точку M среднюю линию, пусть она пересекает сторону SD в точке K. Тогда $PMKL$ — искомое сечение, причём $BP = DL$ и $BM = KD$. Из равенства треугольников BMP и DKL получим $MP = KL$, а значит, $PMKL$ — равнобедренная трапеция.

8.

Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 9$. Точка M — середина ребра AC, а на ребре AA_1 взята точка T так, что $AT = 5$.

а) Докажите, что плоскость BB_1M делит отрезок C_1T пополам.

Решение.



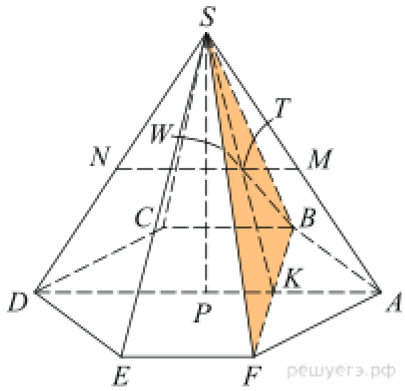
а) Пусть точка M_1 — середина A_1C_1. Очевидно, $M_1 \in BB_1M$. Проведем MM_1. Это прямая, содержащая среднюю линию треугольника TA_1C_1, так как $MM_1 \parallel AA_1$ и проходит через середину A_1C_1. Значит, она проходит и через середину TC_1.

9.

Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит апофему грани ASB в отношении 2 : 1, считая от вершины S.

Решение.



а) Обозначим за M, N середины ребер SA и SD. Поскольку MN — средняя линия треугольника SAD, то $MN \parallel AD \parallel BC$, поэтому точка B также лежит в данной плоскости. Поэтому с гранью ABS данная плоскость пересекается по прямой BM — медиане треугольника SAB. Она делит его медиану SQ (Q — середина AB) в отношении 2: 1 считая от вершины.

10.

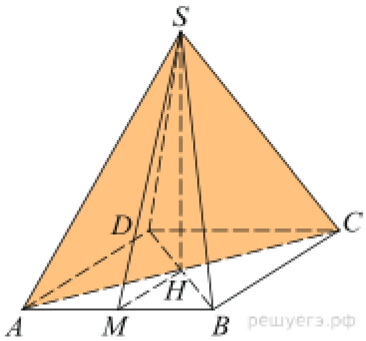
Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64.

а) Постройте прямую пересечения плоскости SAC и плоскости, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания.

Решение.

Сторона основания пирамиды равна. Тогда диагональ основания $AC = 8\sqrt{2}$.

а) Пусть SH — высота пирамиды. Тогда H — середина основания пирамиды. Значит, SH — искомая прямая.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проводя исследование построения сечений нужно отметить, что метод следов, который является основным в учебной литературе не всегда удобен в практике построения сечений, так как расположение точек, определяющих след, может быть за рамками чертежа или две заданные точки сечения могут лежать на прямой, параллельной основанию.

Метод внутреннего проектирования универсален, но не однократное использование его при построении сечения приводит к загромождению рисунка вспомогательными линиями. Поэтому важно знание дополнительных методов построения сечений, которые приведены в работе.

Кроме того, применение иных методов построения сечения упрощают решение метрических задач, связанных с построенным сечением. В частности, в работе рассмотрены две задачи, в которых построение сечений методом переноса секущей плоскости приводит к рациональному решению метрических задач.

Знание разнообразных методов построения сечений важно при подготовке к сдаче ЕГЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казаков П. Г. Параллельные проекции и методы и решения конструктивных задач. М.: Учпедгиз, 1960.

2. Орехов П. С. Изображения в стереометрии. Ижевск: Удмуртия, 1981.

3. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2008.

4. Потоскуев Е.В. Изображение пространственных фигур на плоскости. Построение сечений многогранников. Учебное пособие для студентов физико-математического факультета педвуза. — Тольятти: ТГУ, 2004.

5. Четверухин Н. Ф. Изображения в курсе геометрии. М.: Учпедгиз, 1958.

Построение сечений и их применение в жизни

Автор: Журавлёв Николай; Шабовта Владислав

Руководитель: Перегудова Наталья Владимировна

г. Комсомольск-на-Амуре

Содержание.

Введение.

Данная тема занимает важное место в курсе геометрии. Метод сечений многогранников находит широкое применение в реальной жизни, его знание необходимо людям следующих профессий: архитекторам, ювелирам, дизайнерам, инженерам, токарям.

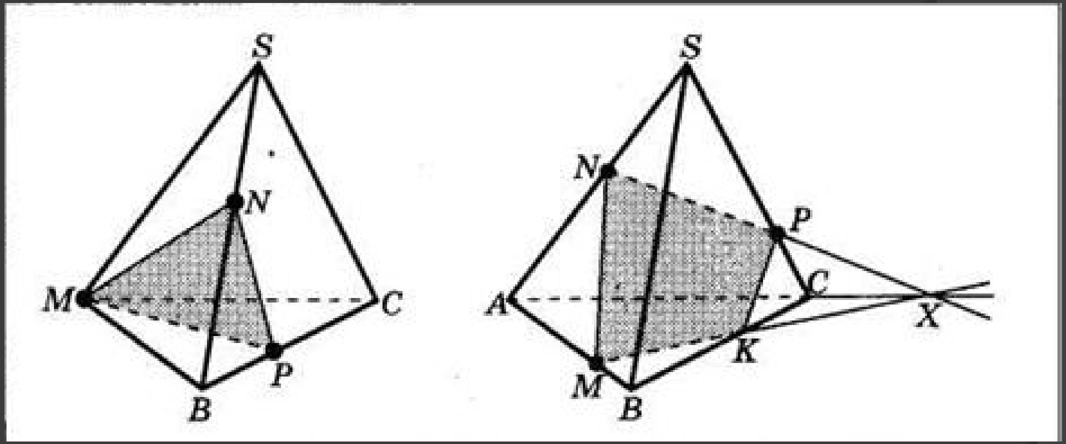
Цели

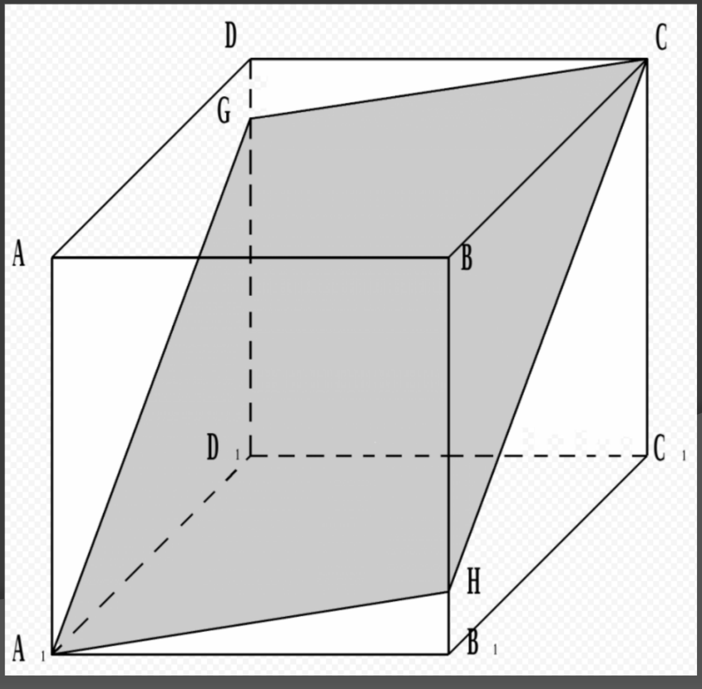
При работе над проектом мы поставили перед собой следующие цели:

1. **Исследовать какие фигуры возможны при построении сечений многогранников.**
2. **Выяснить какие существуют способы построения сечений(даже те которые не изучаются в школьном курсе геометрии)**
3. **Показать значимость данной темы и применение ее в реальной жизни.**

Общие сведения.

Для решения многих геометрических задач, связанных с тетраэдром и параллелепипедом, полезно уметь строить на рисунке их сечения различными плоскостями.





Формы сечений

Параллелепипед:

6 – граней

12 – ребер

8 – вершин

4 – диагонали

Сечения: треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник .

Тетраэдр:

4 –грани

6 – ребер

4 – вершины

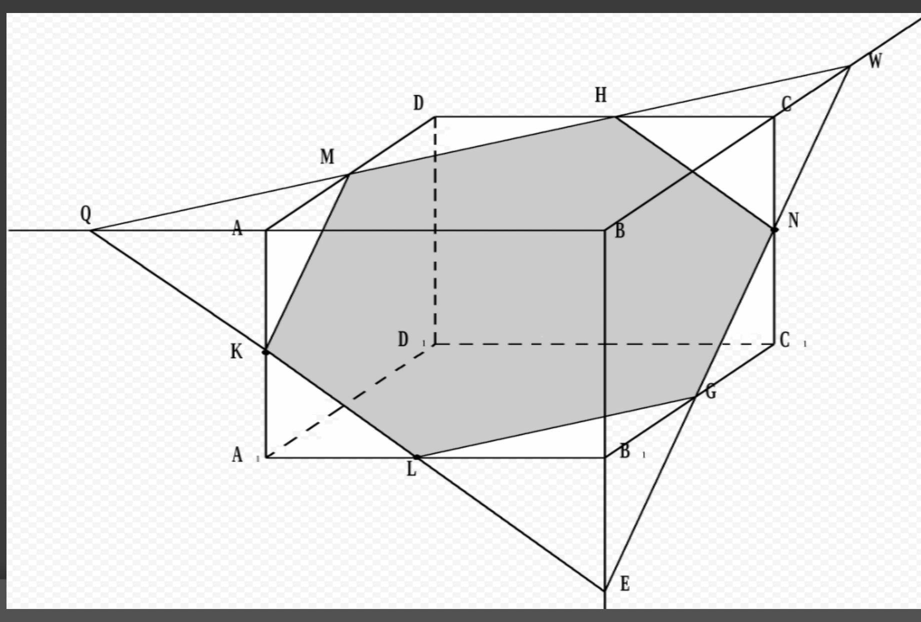
Сечения : треугольник, четырехугольник.

Методы построения сечений.

Существует три основных метода построения сечений многогранников:

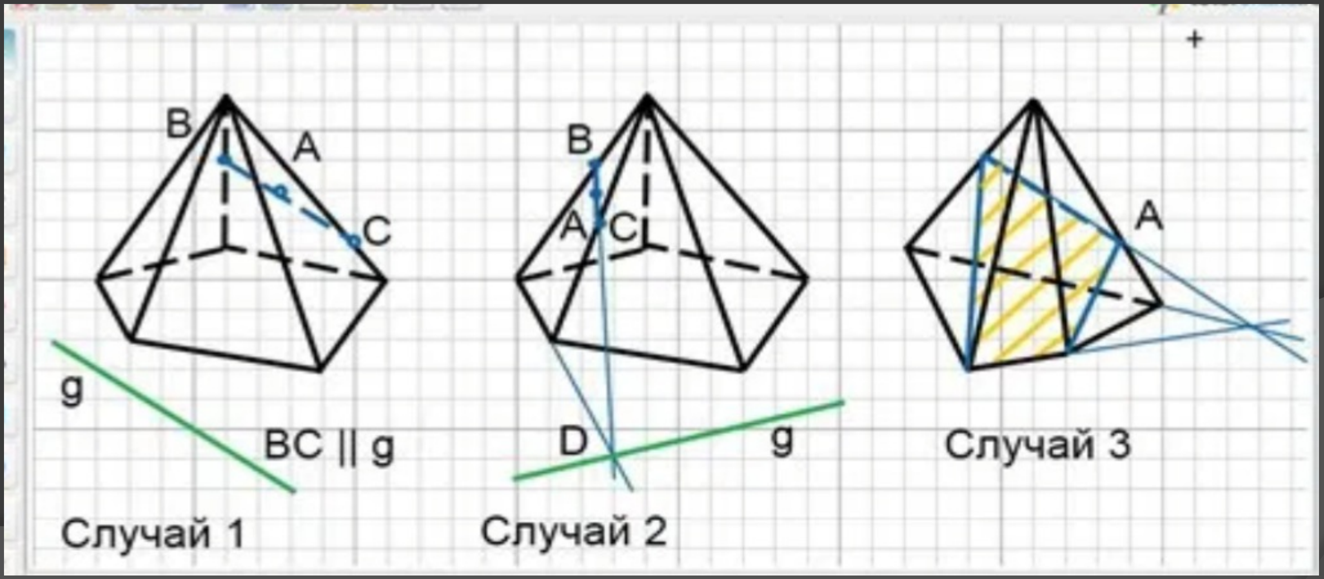
1) Метод следов.

2) Метод вспомогательных сечений.



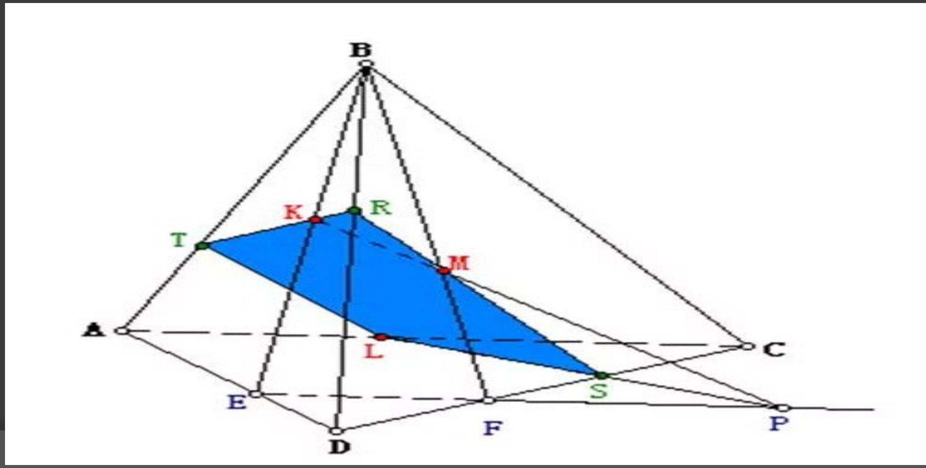
Метод следов.

Метод следов заключается в построении следов секущей плоскости на плоскость каждой грани многогранника. Построение сечения многогранника методом следов обычно начинают с построения так называемого основного следа секущей плоскости, т.е. следа секущей плоскости на плоскости основания многогранника.



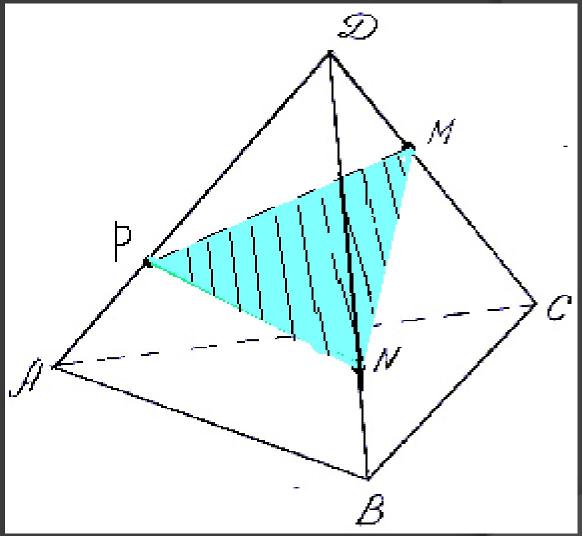
Метод вспомогательных сечений.

Метод вспомогательных сечений построения сечений многогранников является в достаточной мере универсальным. В тех случаях, когда нужный след (или следы) секущей плоскости оказывается за пределами чертежа, этот метод имеет даже определенные преимущества. В некоторых случаях метод вспомогательных сечений оказывается наиболее рациональным.



Задачи на построение сечения тетраэдра.

Построить сечение тетраэдра ABCD, проходящее через точки P, N, M принадлежащие ребрам AD, DB, DC.

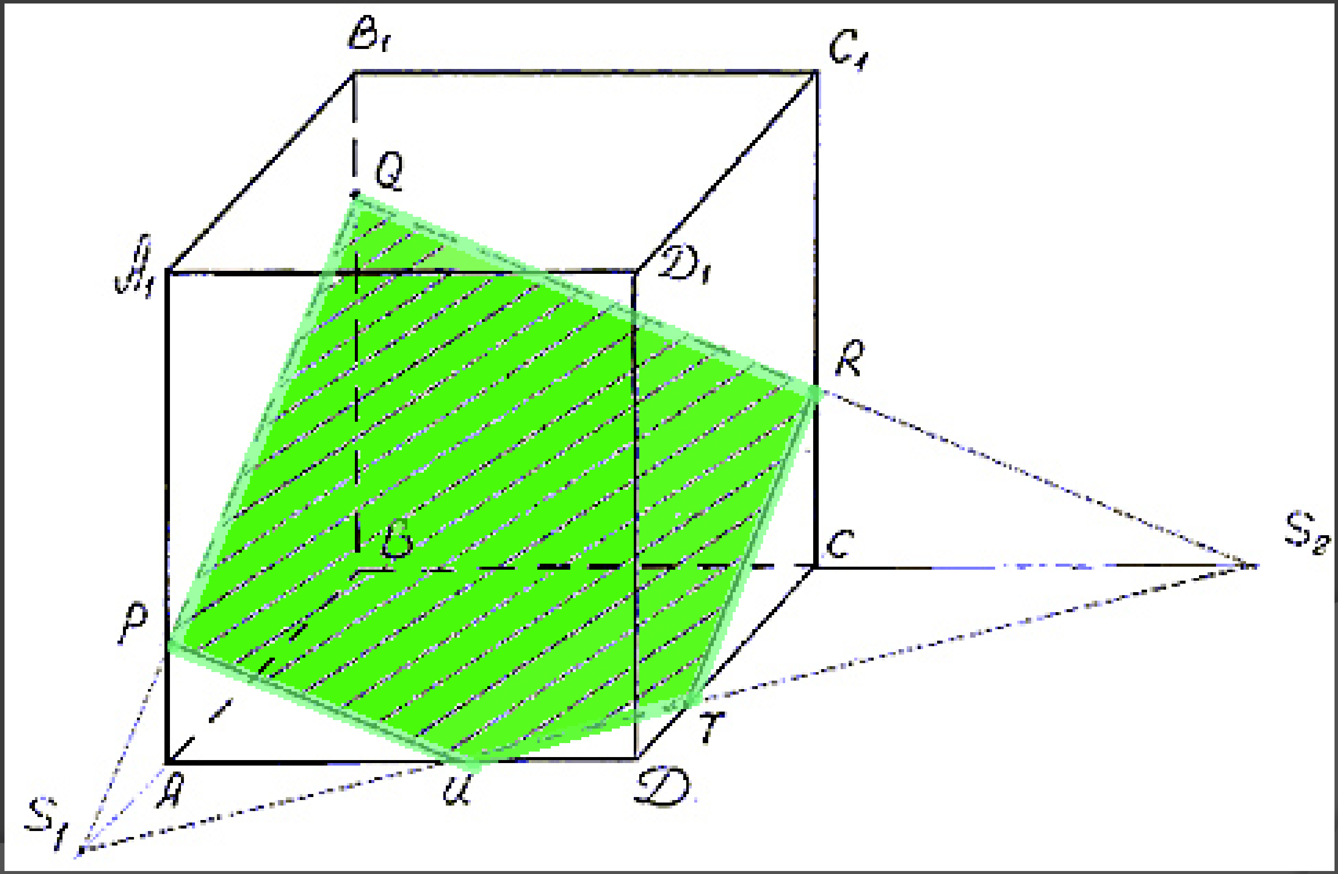


Построение

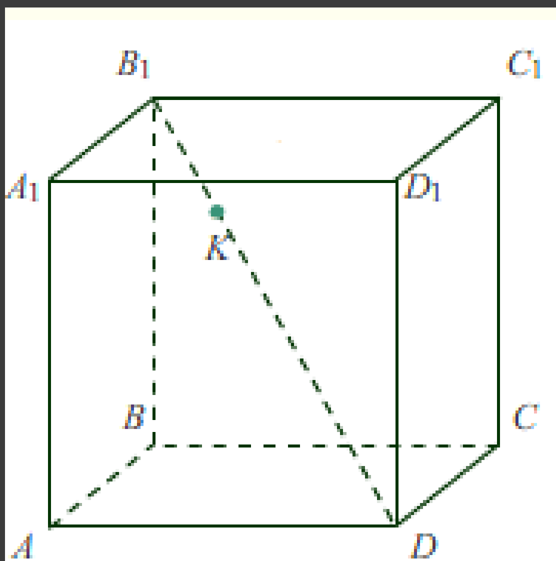
1. PN , т.к. P и N принадлеж. (ADB)
2. MN, т.к. M и N принадлеж. (BDC)
3. PM, т.к. P и M принадлеж. (ADC)
4. PNM – искомое сечение

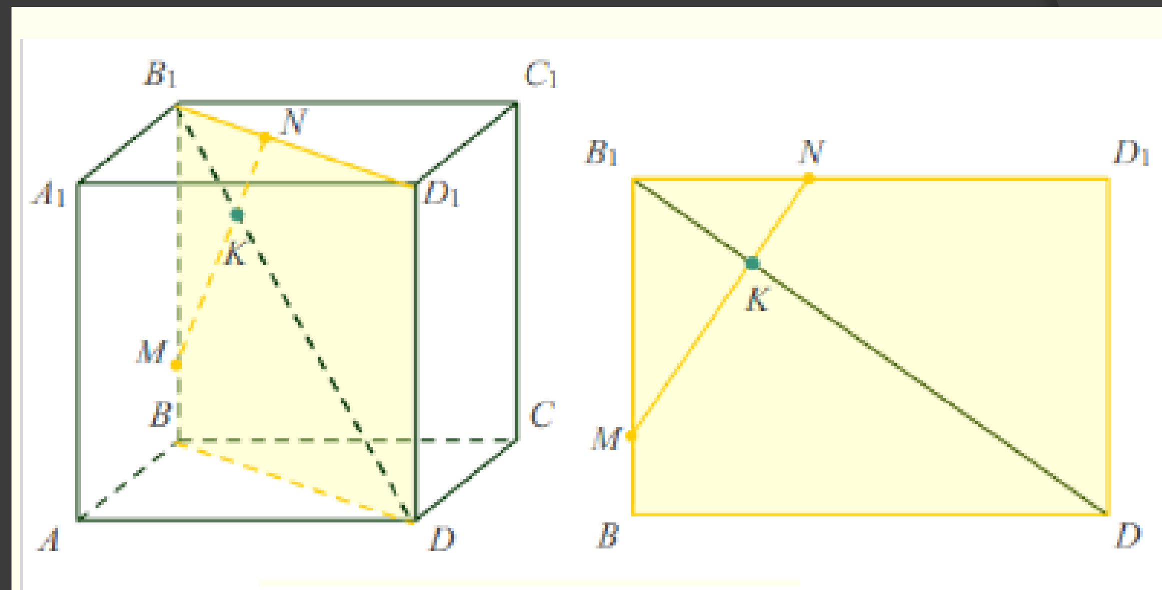
Задачи на построение сечения параллелепипеда.

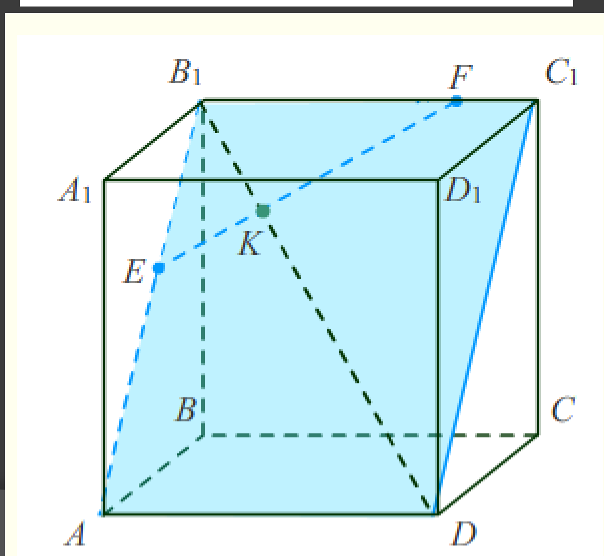
Построить сечение призмы ABCDA1B1C1D1 плоскостью, проходящей через точки P, Q, R (точки указаны на чертеже.

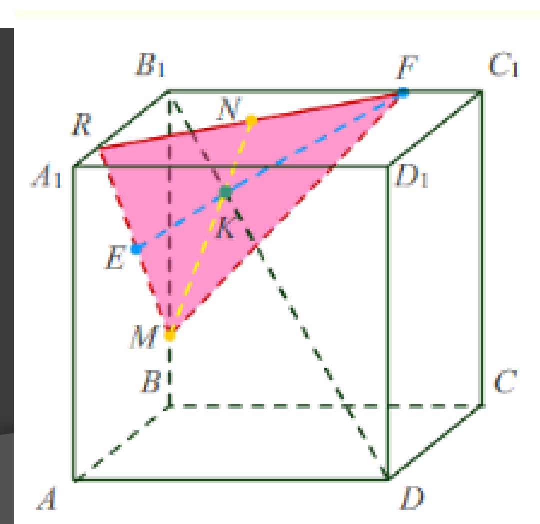


На диагонали B_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка K такая, что $B_1K : B_1D = 1 : 4$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку K перпендикулярно B_1D.



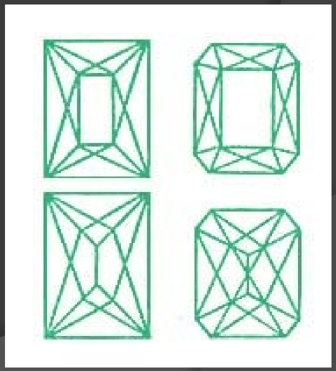






Применение сечения в жизни.

- Строительство
- В чертежном проецировании (проецирование в трех плоскостях)
- В ремонтных работах
- В бытовых работах
- В пищевой промышленности.
- В архитектуре (мозаика, пирамиды).
- В огранке ювелирных изделий.



Список литературы.

1. Геометрические построения в курсе средней школы, А.О.Корнеева, Саратов, Издательство «Лицей», 2003.
2. «Энциклопедия Кирилла и Мефодия», 2003г.
3. Казаков П.Г., Параллельные проекции и методы и решение конструктивных задач. Учпедгиз, 1960.
4. Четверухин Н.Ф. Методы геометрических построений, Учпедгиз, 1952.